Α.Μ.	ΕΠΙΘΕΤΟ	ΟΝΟΜΑ	ΕΤΟΣ ΕΓΓΡΑΦΗΣ

Απειροστικός Λογισμός Ι, 26/1/2016 Διδάσκοντες: Α. Τόλιας, Κ. Μαυρίδης

Θέμα 1. Δίνεται το σύνολο $A = \{x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} : \; x \leq M\}$, όπου M ο αριθμός μητρώου σας. Να δείξετε ότι:
(α) **[0.5 μον.]** Το σύνολο A δεν έχει μέγιστο στοιχείο.
(β) **[0.5 μον.]** $\sup A = M$. [Υπόδειξη: Και για τα δύο ερωτήματα είναι απαραίτητο να χρησιμοποιήσετε την πυκνότητα των αρρήτων στους πραγματικούς αριθμούς.]

Θέμα 2. (α) **[0.5 μον.]** Να δείξετε, αποκλειστικά με χρήση του ορισμού, ότι η ακολουθία $a_n = 5 + \frac{7}{\sqrt[10]{n}}$ συγκλίνει στον αριθμό 5.
(β) **[1 μον.]** Δίνεται η ακολουθία $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $\beta_1 = 1$ και $\beta_{n+1} = -3 + \sqrt{23 + \beta_n}$. Να δείξετε ότι η $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα και να υπολογίσετε το όριό της.
(γ) **[2 μον.]** Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι παρακάτω ακολουθίες

$$\gamma_n = \sqrt[n]{7^n + 9 \cdot 2^n}, \quad \delta_n = \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{n}, \quad \varepsilon_n = \log(4n+3) - \log(2n+1), \quad \zeta_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{3n} + \frac{(-1)^n}{n}$$

Θέμα 3. (α) Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο συνεχείς συναρτήσεις και $x_0 \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f + g$ είναι συνεχής στο x_0 ως εξής:
(i) **[0.5 μον.]** Με χρήση του $\varepsilon - \delta$ ορισμού.
(ii) **[0.5 μον.]** Με χρήση του χαρακτηρισμού της συνέχειας με ακολουθίες [(ακολουθιακός ορισμός της συνέχειας) ή (αρχή μεταφοράς)].
(β) **[1 μον.]** Να δειχθεί, αποκλειστικά με χρήση του $\varepsilon - \delta$ ορισμού, ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x+5}$, $x > 0$, είναι συνεχής στο $x_0 = 4$.

Θέμα 4. Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $-3 < f(x) < 0$ για κάθε $x \in [0,1]$. Να δείξετε ότι:
(α) **[0.5 μον.]** Υπάρχει $\xi \in (0,1)$ ώστε $\sqrt{10\xi} = -f(\xi)$.
(β) **[1 μον.]** Υπάρχει $\lambda > 0$ ώστε $f(x) + \sqrt{10x} + 3 \geq \lambda$ για κάθε $x \in [0,1]$.

Θέμα 5. **[1.5 μον.]** Ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει κάθετες πλευρές με μήκη a, β και υποτείνουσα με μήκος ίσο με 1. Να βρεθεί για ποιες τιμές των a, β η παράσταση $2a + \beta$ λαμβάνει μέγιστη τιμή, η οποία και να υπολογιστεί.

Θέμα 6. Δίνεται $f : [a, \beta] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(a) = f(\beta) = 0$ και ρ ένας πραγματικός αριθμός με $\rho \in (-\infty, a) \cup (\beta, +\infty)$. Ορίζουμε $g : [a, \beta] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \frac{f(x)}{x - \rho}$.
(α) **[0.5 μον.]** Να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ με $g'(\xi) = 0$.
(β) **[0.5 μον.]** Για ξ που ικανοποιεί το συμπέρασμα του ερωτήματος (α), να δειχθεί ότι η εφαπτομένη ευθεία της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ διέρχεται από το σημείο $(\rho, 0)$.

Θέμα 7. **[1.5 μον.]** Να εξεταστεί αν υπάρχουν τα όρια

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{\sin x}\right), \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x}, \qquad \lim_{x\to -\infty} \sin x$$

Καλή επιτυχία!